A. ZABALZA MARTÍ

El concepto de precio sombra *

La evaluación de las consecuencias de un determinado proyecto puede abordarse de formas muy distintas. En general, sin embargo, el método de evaluación vendrá en gran parte determinado por el carácter del proyecto. Si éste es privado, los costes y beneficios resultantes del mismo serán identificados pura y simplemente con los que soporte y disfrute la unidad económica que emprende dicho proyecto y su valoración se hará de acuerdo con los precios relevantes para esta unidad; en una economía de mercado estos precios serán precisamente los generados por el proceso de intercambio. Si el proyecto es público, en cambio, la identificación de los costes y beneficios habrá de referirse a la sociedad como un todo y su caracterización dependerá estrechamente de los diferentes objetivos, económicos o de otro tipo, que tal sociedad tenga; en cuanto a la valoración, los precios a usar no tienen por qué ser los generados por el mercado a no ser que éstos cumplan una serie de condiciones altamente restrictivas.

El análisis coste-beneficio puede interpretarse como un método de evaluación de proyectos a partir del uso de objetivos sociales. En el caso en que los precios generados por el mercado fueran consistentes con estos objetivos —es decir, en el caso en que dichos precios reflejaran costes y beneficios sociales —no habría en realidad ninguna diferencia entre una evaluación social y una evaluación comercial. Sin embargo, en la medida en que no cumplan tales condiciones, los precios de mercado no pueden ser usados para medir las consecuencias sociales de un determinado proyecto. Otro tipo de precios, con propiedades que los generados por el mercado carecen, deberán ser utilizados: los precios sombra.

Esta forma de plantear el problema de la valoración dentro del análisis

* Una primera versión de este trabajo fue presentada en el seminario de «Investment Planning» de la «London School of Economics» dirigido por el profesor A. Sen; agradezco a los miembros de dicho seminario sus comentarios y sugerencias. La tercera sección y la conclusión se han beneficiado considerablemente de una crítica realizada al artículo por C. Sebastián. La responsabilidad del contenido y de los posibles errores subsistentes es, sin embargo, enteramente mía.

coste-beneficio reposa en un supuesto cuya explicitación merece ser señalada. Se considera que el proceso de mercado, por sí mismo y debido a una serie de distorsiones, no genera el particular conjunto de precios que llevaría a una asignación óptima de los recursos existentes. Se acepta, en cambio, la viabilidad del sistema de precios en el sentido de que un determinado conjunto de precios puede llevar a la asignación óptima de recursos. En otras palabras, se supone que el sistema de precios es operativo pero no que los precios generados por el mercado sean los óptimos.

Dado que el sistema de precios se acepta como operativo, la inmediata cuestión a considerar es el significado del conjunto de precios que puede llevar a la asignación óptima. Una clarificadora interpretación es la ofrecida por el análisis de la programación: dicho conjunto de precios se corresponde con la valoración de recursos implícita en la asignación que optimiza una determinada función objetivo sujeta al cumplimiento de ciertas restricciones. La interpretación económica de estos valores implícitos se desprende directamente de dicho esquema de maximización condicionada: el valor imputado a un determinado recurso representa la magnitud adicional de la función de objetivos —en este caso, la adición al máximo de bienestar social— que podría obtenerse a partir del incremento de la restricción (fijada por las disponibilidades de este recurso) en una unidad.

Este enfoque del concepto de precios sombra se evidencia útil para la comprensión no sólo de la naturaleza de los mismos sino también de la forma en que el análisis coste-beneficio puede ser integrado con la planificación nacional. Tal planificación puede ser interpretada como un ejercicio de programación; el objeto del mismo será hallar, entre otras cosas, el conjunto de precios que origine una asignación de recursos óptima. En la medida en que el análisis coste-beneficio se halla interesado en la cuestión de una asignación óptima a nivel de proyectos, la conexión entre ambos métodos resulta obvia.

Éstas son, expresadas sumariamente, las cuestiones a tratar en el presente artículo. En la primera sección las razones que nos inducen a rechazar los precios de mercado serán consideradas. En la segunda se aborda el estudio del concepto de precio sombra y de su naturaleza tal como ésta emerge del análisis de programación. Finalmente, en la tercera sección, se examina, a la luz de los anteriores conceptos, la relación existente entre el análisis coste-beneficio y la planificación nacional.

I. El mecanismo de mercado como método de asignación de recursos

1. *Los supuestos mínimos del mercado perfecto*

Un mercado perfecto, de acuerdo con los supuestos que subrayan su definición, puede lograr eficiencia económica o, incluso, alcanzar un máximo de bienestar social (optimalidad).[1] Dicho de otra forma, un mercado que satisfaga determinadas condiciones generará el conjunto de precios que lleva a la asignación eficiente, y según el caso también óptima, de recursos.

No es preciso entrar en un análisis detallado acerca de la naturaleza de estos supuestos, o de sus implicaciones en la obtención de eficiencia u optimalidad, para apercibirse de la medida en que los mercados reales se apartan del modelo teórico. La mera descripción de tales supuestos puede bastar para poner de manifiesto este punto.

Un mercado alcanzará eficiencia económica si satisface los siguientes supuestos:

1. Los consumidores, los productores y los suministradores de factores, participantes en el proceso económico, son racionales y poseen un conocimiento perfecto acerca de sus respectivos mercados.
2. Todos los mercados de productos finales y de factores se hallan en equilibrio perfecto y competitivo.
3. No existen externalidades en consumo, producción o intercambio.
4. No existe desempleo de factores de producción.

Los supuestos 1 y 2 aseguran que el precio de mercado (p) igualará el beneficio marginal privado (BMP) —desde el punto de vista del consumidor—, que el precio igualará el coste marginal privado (CMP) —desde el punto de vista del productor—, y, además, que el beneficio marginal privado igualará el coste marginal privado.

$$p = \text{BMP} = \text{CMP}$$

Si el supuesto 3 se cumple también, el coste marginal privado igualará al coste marginal social (CMS); el supuesto 4, finalmente asegura que el equilibrio alcanzado será uno de pleno empleo y que, por tanto, la economía se hallará operando en la frontera de su conjunto de posibilidades.

$$p = \text{BMP} = \text{CMS}$$

El mercado alcanzará máximo bienestar social —es decir, optimalidad— si además de los cuatro anteriores un quinto supuesto se cumple:

5. La distribución de la renta es óptima en el sentido de que una unidad de renta es valorada de la misma forma sea quien sea su beneficiario.

En estas circunstancias el conjunto de precios generados por el mercado

1. Para la distinción entre los conceptos de eficiencia y optimalidad véase Koopmans (4), capítulo 1.

reflejará tanto costes marginales sociales (CMS) como beneficios marginales sociales (BMS).

$$p = \text{BMS} = \text{CMS}^2$$

2. *El fallo del mercado en la obtención de eficiencia y optimalidad*

Por lo que respecta a eficiencia, dos son las principales razones que nos llevan a desconfiar de los precios de mercado como método de asignación de recursos. La primera hace referencia a la existencia de un equilibrio de competencia perfecta (supuesto 2); la segunda a la existencia de externalidades (supuesto 3).

a) Equilibrio de competencia perfecta

Un primer factor que puede impedir competencia perfecta es la existencia de economías de escala. En tal caso, precios no sólo reflejarán costes de oportunidad sino también rentas de monopolio. Un segundo factor hace referencia a la imposibilidad de alcanzar —a causa de fricciones, falta de información, etc.— una posición de equilibrio.

b) Externalidades

Los precios de mercado, por varias razones —confusa definición de derechos de propiedad, dificultad en el uso del mercado para imputar costes, etc.— pueden no reflejar el verdadero coste incurrido por la sociedad a causa de una determinada actividad económica.

Por lo que respecta a optimalidad —incluso si las dos razones arriba señaladas no son relevantes— una condición suficiente para que los precios de mercado no sean óptimos puede ser establecida con referencia al supuesto 5 del apartado anterior.

c) Distribución de la renta

En una situación en la que la renta esté distribuida de tal forma que la unidad marginal no sea valorada igualmente por todos los posibles beneficiarios (el criterio para establecer esta distribución implica naturalmente un juicio de valor) los precios de mercado fracasarán en la tarea de reflejar las dis-

2. Estrictamente hablando, las igualdades se obtienen en términos relativos más que en términos absolutos. Así, las igualdades que se desprenden de los supuestos 1 y 2 serían:

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{rms}_{12} = \text{rmt}_{12}$$

donde rms y rmt son respectivamente las relaciones marginales de sustitución y transformación entre los bienes 1 y 2. Las subsiguientes variaciones surgen de considerar las correspondientes relaciones marginales sociales.

tintas ponderaciones que deberían otorgarse a una unidad de renta de acuerdo con el destinatario de la misma.

Cuanto más los puntos *a*), *b*) y *c*) reflejen situaciones reales, menos aceptables serán los precios de mercado como medios para asignar recursos, sea eficiente u optimalmente, y mayor será la necesidad de sustituirlos en la valoración de proyectos por lo que ha venido en llamarse precios sombra.

3. *La viabilidad del sistema de precios*

Antes de entrar en el análisis de la naturaleza de los precios sombra es importante señalar una implicación del presente enfoque. El mismo rechaza el mecanismo de mercado porque no genera precios aceptables pero, sin embargo, acepta el sistema de precios como método de asignación de recursos. En este sentido el inmediato punto es plantearse la cuestión acerca de si las razones que nos llevan a rechazar el mecanismo de mercado no serán acaso también factores que impidan la operatividad del sistema de precios. El problema es importante porque sobre él reposa todo el significado del uso de precios sombra como instrumentos para la asignación de recursos. La respuesta a dicha cuestión no es, desafortunadamente, demasiado satisfactoria: existen casos en los que no sólo el mecanismo de mercado sino también el sistema de precios deberá ser rechazado.

En general, estos casos se asocian con la ausencia de *convexidades* en el conjunto de posibilidades. Tal problema puede surgir de dos circunstancias: *a*) existencia de economías de escala[3] y *b*) existencia de externalidades que afecten la convexidad de las restricciones del proceso de maximización. Sin embargo, una vez tal ausencia de convexidades aparece, todavía existen dos casos que poseen propiedades distintas, en lo relativo a las posibilidades del uso del sistema de precios, y cuyas peculiaridades surgen de diferencias en curvaturas relativas.[4]

El primer caso ocurre cuando —véase la figura 1— la curvatura de la frontera del conjunto de posibilidades es relativamente mayor que la de la función de bienestar a maximizar. En tal caso, y en un sentido restringido, el sistema de precios todavía podría ser usado para la asignación de recursos. Con referencia a la figura 1, los precios relativos de la posición final no serían los implícitos en el punto *A* porque la asignación que surge de tales precios no maximiza el valor del producto nacional ni tampoco la función de bienestar social (*W*). Existe, sin embargo, otro conjunto de precios que podría llevarnos al punto *B*; en tal punto tanto el valor del producto nacional como el bienestar social serían maximizados, aunque —dada la circunstancia de que

3. Nótese que no todas las economías de escala dan lugar a ausencia de convexidad. Existen casos débiles de rendimientos crecientes en las funciones de producción en los que el conjunto de posibilidades es todavía convexo.

4. Un tratamiento algo distinto de este punto puede encontrarse en Bator (2).

ésta es una «solución esquina»— [5] nunca podríamos asegurar que tales precios poseen el significado usual de costes marginales sociales y beneficios marginales sociales.

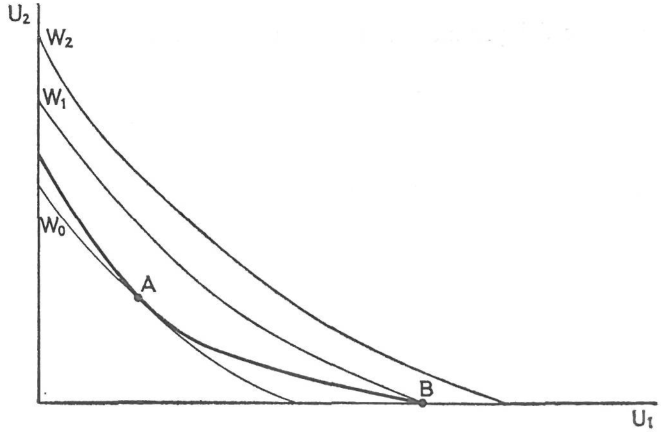

FIG. 1

El segundo caso aparece cuando la curvatura de la frontera del conjunto de posibilidades es relativamente menor que la de la función de bienestar a maximizar. En tal situación el sistema de precios no puede ser usado para la asignación de recursos. Refiriéndonos a la figura 2, es obvio que el conjunto de precios implícito en la asignación representada por el punto *A*, aun-

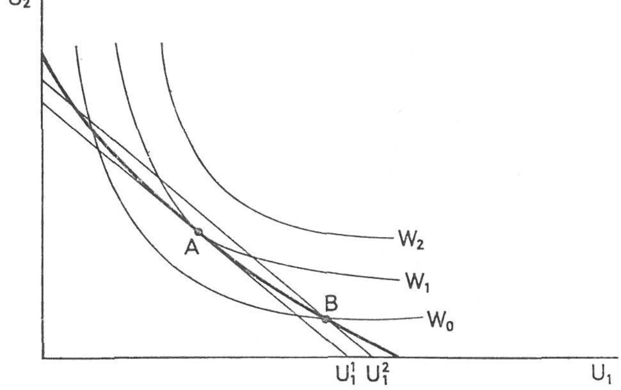

FIG. 2

5. Por «solución esquina» entendemos aquella cuyos valores se encuentran en uno de los ejes de coordenadas.

que maximiza la función de bienestar, minimiza el valor del producto nacional; tal inconsistencia haría que el punto A no pudiera ser sostenido. Por otra parte, cualquier intento de maximizar el valor del producto (con el anterior conjunto de precios) llevaría a un decremento en el bienestar social. En efecto, con el conjunto de precios implícito en A, pasar de A a B supondría incrementar el valor del producto (de U_1^1 a U_1^2), pero también decrementar el bienestar alcanzado (de W_1 a W_0).

Los resultados del anterior análisis muestran que, aunque los ejemplos aquí considerados pueden ser interpretados meramente como posibilidades, tales posibilidades deben tenerse en cuenta dado su carácter de obstáculo definitivo para el uso del sistema de precios como medio para la asignación de recursos.

II. La naturaleza de los precios sombra

De lo dicho en la introducción al presente artículo, resulta claro que precios sombra son aquellos precios cuya adopción llevaría a la asignación óptima de recursos, entendiendo por tal aquella asignación que maximiza una determinada función de bienestar social. La anterior cuestión puede plantearse desde un punto de vista ligeramente distinto: dada una función de bienestar social que tiene como argumentos ciertos procesos,[6] podemos hallar en qué medida tales procesos deben ser acometidos en orden a maximizar tal función sujeta a un determinado número de condiciones; en estas circunstancias, el conjunto de precios implícito en este programa óptimo será precisamente el conjunto de precios sombra.

La exposición formal del problema puede ayudar a la clarificación de la anterior definición. La función objetivo puede entenderse como una función de bienestar (W) que depende de la cantidad producida de un determinado conjunto de procesos (x_i, $i = 1, \ldots, m$). Asimismo, para determinar la producción de cada proceso, es preciso conocer en qué medida cada proceso necesita de un determinado conjunto de recursos (r_j, $j = 1, \ldots, n$); los coeficientes a_{ij} suministran información acerca de la forma en que procesos y recursos se hallan relacionados; a_{ij} es la cantidad de recurso j necesaria para producir una unidad del proceso i. El obvio condicionamiento al cual el método de maximización estará sometido es que la cantidad total de recursos utilizados para producir un determinado conjunto de procesos no puede exceder la cantidad total en que tales recursos se hallan disponibles. El otro condicionamiento es que ningún proceso puede tener un valor negativo. Si a las anteriores especificaciones añadimos la de linearidad, nos hallamos

6. El término «procesos» es empleado aquí para expresar una particular actividad económica y no debe ser asociado necesariamente con productos o bienes; así, un proceso podría ser consumo en general; otro, consumo en una determinada región; otro, nivel de producción de artículos de lujo, etc.

frente a un típico problema de programación lineal, cuya formulación puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} \underset{x}{\text{Max}} & & W = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m & \\ \text{sujeta a} & 1) & a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \leqslant r_1 & \\ & & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \leqslant r_2 & \\ & & \vdots & \\ & & a_{1n}x_1 + a_{2n}x_n + \ldots + a_{mn}x_m \leqslant r_n & \\ & \& \ 2) & x_i \geqslant 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

o, simplificando la notación:

$$\underset{x}{\text{Max}} \quad W = \sum_{i=1}^{m} p_ix_i$$

$$\begin{array}{llll} \text{sujeta a} & 1) & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j \leqslant 0 & (j = 1, \ldots, n) \\ & \& \ 2) & x_i \geqslant 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

Los únicos precios usados hasta el momento son los componentes del conjunto p_i $(i = 1, \ldots, m)$ en la función objetivo. Tales precios no son todavía los precios sombra y tampoco deberían ser necesariamente interpretados como precios de mercado. Si los elementos del conjunto x_i $(i = 1, \ldots, m)$ son interpretados como procesos para cuya producción se necesitan recursos (distintos tipos de consumo, inversión, etc.), entonces el conjunto p_i es el conjunto de ponderaciones que la función de bienestar social atribuye a cada uno de los distintos procesos. Tales ponderaciones pueden resultar de la articulación social de preferencias individuales o pueden representar la opinión del planificador; su determinación, pues, corresponde a la estrategia económica global del país.

A primera vista podría parecer extraño que un ejercicio basado en datos semejantes a los usados por las distintas unidades participantes en el mercado y fundamentado en la maximización como método de solución —a imagen del comportamiento supuesto para tales unidades—, llegue a una solución óptima y que el mercado falle en la obtención de tal objetivo. Antes de proseguir con la presentación completa del problema de programación es interesante dedicar unas líneas a esta cuestión.

Primeramente, relajemos un tanto nuestros requerimientos: en lugar de un resultado óptimo, establezcamos que la solución perseguida sea simplemente un resultado eficiente. En términos del problema de programación, permitamos que las ponderaciones de la función objetivo sean precisamente aquellas que *de facto* son usadas en el mercado. Es decir, permitamos que ambos problemas de maximización (programación y mercado) usen exactamente los mismos datos (ponderaciones incluidas). La pregunta entonces es: ¿llegarán ambos métodos a una solución eficiente? La respuesta es clara: el ejercicio de programación llegará ciertamente a tal solución, mientras que el mercado llegará, casi ciertamente, a una solución no eficiente. ¿Dónde, pues, reside la diferencia esencial entre estos dos métodos de maximización? Una vez más la respuesta es obvia: la diferencia reside en la satisfacción o no de la serie de supuestos enumerados en la sección anterior. El mercado resultará en una solución eficiente si los cuatro primeros supuestos son satisfechos; en la medida en que existan externalidades, desequilibrios, etc., la solución obtenida será no-eficiente. El problema de programación, en cambio, nos guiará a la solución eficiente porque, además de simular las decisiones de las unidades económicas participantes en el mercado —decisiones consistentes con un comportamiento maximizador— toma en consideración los supuestos que el mercado viola. En efecto, tal ejercicio posee un conocimiento completo de los recursos disponibles y del estado de la tecnología (se supone que el problema está completamente especificado); permite un ajuste perfecto de todas las variables y llega a un equilibrio estable (se supone la existencia de una solución única); y finalmente, internaliza todas las externalidades (la simultaneidad del sistema asegura que todas las interacciones son tenidas en cuenta; es decir, presenta el ejercicio de maximización como si fuera operado por una sola unidad económica que imputase cada coste y beneficio resultante de su actividad). El argumento podría llevarse todavía más lejos. En el caso en que el mercado respetara los cuatro primeros supuestos pero no el quinto, la solución por él obtenida sería eficiente aunque no óptima; el ejercicio de programación, en cambio, llevaría a una solución óptima porque, al especificar las ponderaciones de la función de objetivos de acuerdo con el supuesto 5 (o, para el caso, de acuerdo con algún otro juicio de valor), la distribución deseada del producto sería también tenida en cuenta en el resultado.

El problema, en la forma hasta ahora expuesto, puede resolver la asignación de recursos que maximizará la función objetivo. Ahora bien, asignación de recursos y fijación de precios son dos aspectos del mismo problema. Por ello es de esperar que, asociado al problema para encontrar la asignación óptima de recursos, exista otro para encontrar los precios implícitos de estos recursos óptimamente asignados. Éste es el problema «dual» y estos precios implícitos son los precios sombra de los correspondientes recursos.[7]

El problema «original» maximizaba el bienestar a través del hallazgo del nivel óptimo de procesos sujeto a la existencia de un conjunto limitado de recursos. Similarmente, el «dual» minimiza el valor total imputado a este conjunto de recursos (coste de oportunidad de tales recursos) con respecto al conjunto de precios de los mismos, sujeto a la restricción de que el coste de cada proceso no sea menor que la valoración a él imputada por la función de

7. Para una exposición completa de este problema véase Dorfman, Samuelson y Solow (3).

bienestar. Si denominamos V la función que representa el valor imputado de los recursos y v_j el conjunto de precios sombra ($j = 1, \ldots, n$) entonces el problema puede expresarse de la siguiente forma:

$$\underset{v}{\text{Min}} \quad V = v_1 r_1 + v_2 r_2 + \ldots + v_n r_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{sujeta a} & 1) & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \geqslant p_1 \\ & & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \geqslant p_2 \\ & & \vdots \\ & & a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n \geqslant p_m \\ & \& \ 2) & v_j \geqslant 0 \qquad\qquad (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

o, con notación simplificada

$$\underset{v}{\text{Min}} \quad V = \sum_{j=1}^{n} v_j r_j$$

$$\begin{array}{lll} \text{sujeta a} & 1) & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j - p_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ & \& \ 2) & v_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

La relación formal entre las dos formas de exponer el problema de programación resulta obvia a partir de la inspección de las respectivas notaciones algebraicas y, por ello, no va a ser tratada en este trabajo. El punto que en cambio merece atención es la naturaleza de las variables «duales» v_j.

La estructura matemática de ambos problemas evidencia claramente que el valor de las soluciones de las dos funciones es el mismo ($W^* = V^*$). Este hecho nos permite asegurar que la función objetivo del problema «dual» es una función expresada en términos de valor y, por tanto, que —dado que las r_j representan cantidades físicas— las variables v_j se corresponden con algo similar a un precio. Por otra parte, este conjunto de precios no es un parámetro exógeno, sino que posee el carácter de solución del problema; dada la cantidad de recursos disponibles, depende de los coeficientes tecnológicos que relacionan recursos y procesos y de las ponderaciones asignadas a cada uno de estos procesos.[8] Así, se puede concluir que, dado el volumen de recursos y especificada la tecnología, tales precios dependen exclusivamente de los juicios de valor asignados (en forma de ponderaciones) a cada uno de los distintos procesos; reflejan, en otras palabras, la valoración implícita de los recursos hecha por el planificador como consecuencia de la prioridad de objetivos que su función de objetivos establece. Ésta es, expresada sumariamente, la interpretación básica de los precios sombra.

Es interesante, antes de entrar en una interpretación más general de tales precios, hacer algunas consideraciones adicionales acerca del ejercicio

8. Tal dependencia se comprueba fácilmente a la vista de la forma en que las variables v_j entran en las restricciones del problema dual.

de programación acabado de exponer; los cuatro puntos que siguen conciernen a cuatro propiedades de la solución de tal ejercicio y muestran claramente la estrecha relación existente entre el «dual» y el «original».

1. Si el coste de producir un determinado proceso es mayor que la valoración a él asignada, tal proceso no será llevado a cabo. Refiriéndonos a la anterior notación, si la restricción del «dual» no es operativa ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j - p_i > 0$), la correspondiente solución del «original» será cero ($x_i = 0$). La lógica de tal resultado es clara: a consecuencia de no emprender tal proceso, podremos liberar recursos para otros fines y producir más (en términos de valor) que lo que hubiéramos producido con dicho proceso.

2. Si el coste de producir un determinado proceso es exactamente igual a la valoración a él asignada, tal proceso puede ser emprendido. Si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j - p_i = 0$, entonces $x_i \geqslant 0$.

3. Si, para un determinado recurso, la cantidad empleada es menor que la cantidad total disponible, el precio sombra de tal recurso será nulo. Si la restricción del «original» no es operativa ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j < 0$), la correspondiente solución del «dual» será cero ($v_j = 0$). Si un determinado recurso existe en exceso de oferta, su coste de oportunidad será nulo; es decir, el empleo de más cantidad de dicho recurso en un determinado proceso, no disminuirá la producción de ningún otro proceso.

4. Si, para un determinado recurso, la cantidad empleada es igual a la cantidad total disponible, el precio sombra de tal recurso puede ser mayor que cero. Si $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j = 0$, entonces $v_j \geqslant 0$.

La anterior interpretación se desprende directamente de la estructura matemática del problema de programación. Una interpretación más familiar para el economista es la de considerar los precios sombra como el valor de la contribución marginal de los recursos al bienestar social.

Para desarrollar esta interpretación no es necesario restringirse a los supuestos de linearidad que hemos utilizado anteriormente; supuestos de convexidad se evidenciarán suficientes. En esta formulación los únicos requerimientos son que los dos conjuntos con los que hasta ahora hemos estado operando (conjunto de posibilidades y conjunto de bienestar) sean convexos y, por tanto, que sus fronteras sean respectivamente cóncavas y convexas con respecto a los ejes de coordenadas.

Bajo estos nuevos supuestos el problema puede ser reformulado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \underset{x}{\text{Max}} & W = W(x) & \\ \text{sujeta a} & 1) & F(x) \geqslant 0 \\ & \&\ 2) & x \geqslant 0 \end{array}$$

donde $F(x)$ representa el vector de las funciones de restricción $f_j\,(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$, siendo $f_j\,(x) = -(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j)$. Nótese el ligero cambio en notación; antes la restricción decía que el exceso de demanda de un determinado recurso $(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j)$ no podía ser mayor que cero $(\leqslant 0)$; ahora —lo que equivale a lo mismo— dice que el exceso de oferta de un determinado recurso $[-(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - r_j)$ o $(r - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i)]$ no puede ser menor que cero $(\geqslant 0)$. La segunda restricción $(x \geqslant 0)$ tiene el mismo significado que antes: la magnitud en la que cada proceso puede ser emprendido no puede ser negativa.

De la mera inspección de cada elemento del vector de restricciones resulta claro que su valor depende de x; de ahí que la notación funcional sea $F(x)$. Por otra parte —y dejando de lado los coeficientes tecnológicos—, vemos que el otro único parámetro que entra en cada restricción es la cantidad disponible del recurso en cuestión. En tal sentido, el vector de restricciones puede ser representado como una función G de la variable x y del parámetro r, donde x y r son vectores.

$$G(x, r) \geqslant 0$$

El problema, entonces, aparecería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \underset{x}{\text{Max}} & & W = W(x) \\ \text{sujeta a} & 1) & G(x, r) \geqslant 0 \\ & \&\ 2) & \quad x \geqslant 0 \end{array}$$

La solución de este problema de programación «cóncava» nos permitirá hallar el programa óptimo (x^*) y el valor óptimo de la variable dual (v^*) para los cuales la función objetivo es maximizada (W^*). La figura 3 representaría esta situación para el caso en el que sólo existieran dos procesos; el punto A sería en este caso la solución del problema.

En los presentes términos, es fácil ver que esta solución depende de las restricciones y que —para una determinada tecnología— las restricciones, a su vez, dependen de la cantidad de recursos disponibles. Así pues, podemos definir esta solución como una función U de la cantidad de recursos disponibles $U(r)$, en donde:

$$U(r) = \underset{x}{\text{Max}} \quad W(x) \qquad \text{sujeta a} \quad G(x, r) \geqslant 0 \quad \& \quad x \geqslant 0$$

Nuestro interés se centra en saber en qué medida la solución cambiará cuando la restricción es disminuida en una unidad; es decir, en saber cuál será la contribución marginal de una unidad de recursos sobre el nivel de

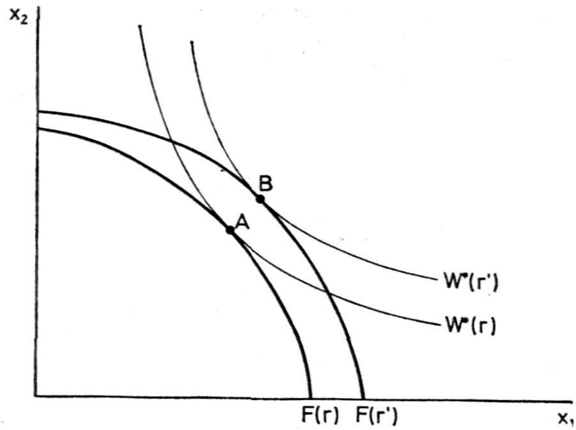

FIG. 3

bienestar.[9] Consideremos un vector r' cuyos componentes son idénticos a los del vector r, a excepción de uno de ellos; en dicho componente la cantidad del recurso r' contiene una unidad más que en r.

$$r = (r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_n)$$
$$r' = (r_1, \ldots, r'_j, \ldots, r_n)$$
$$\text{donde } r'_j = r_j + 1$$

Si dicho recurso contribuye en alguna manera al bienestar total, la solución óptima será distinta. Refiriéndonos a la figura 3, el incremento en una unidad del recurso en cuestión habrá aumentado el conjunto de posibilidades —desde el límite $F(r)$ al límite $F(r')$— y el máximo bienestar obtenido habrá pasado de $W^*(r)$ a $W^*(r')$. Asociado a esta nueva solución óptima, existirá un nuevo programa óptimo $x^*(r')$ y un nuevo conjunto de precios sombra $v^*(r')$. En términos de la función U definida anteriormente:

$$U(r') = \underset{x}{\text{Max}} \quad W(x) \qquad \text{sujeta a} \quad G(x, r') \geqslant 0 \quad \& \quad x \geqslant 0$$

Y dado que suponemos que el efecto no será negativo,

$$U(r') \geqslant U(r)$$

Entonces, $U(r') - U(r)$ representará el impacto marginal de esta unidad de recurso sobre el bienestar social.

Si v_j^* es la variable «dual» del recurso que ha sido aumentado en una

9. Véase Sen (8), introducción a la tercera edición.

unidad, y dados los supuestos sobre convexidad que hemos hecho anteriormente, se puede probar [10] que

$$v_j^*(r) \geqslant U(r_j') - U(r_j) \geqslant v_j(r')$$

Dicha desigualdad especifica la relación existente entre el impacto marginal de una unidad de un determinado recurso y su precio sombra: la contribución marginal de una unidad del recurso j pertenece al intervalo definido por el precio sombra de tal recurso antes y después del incremento en cuestión. La figura 4 expresa en forma diagramática este resultado.

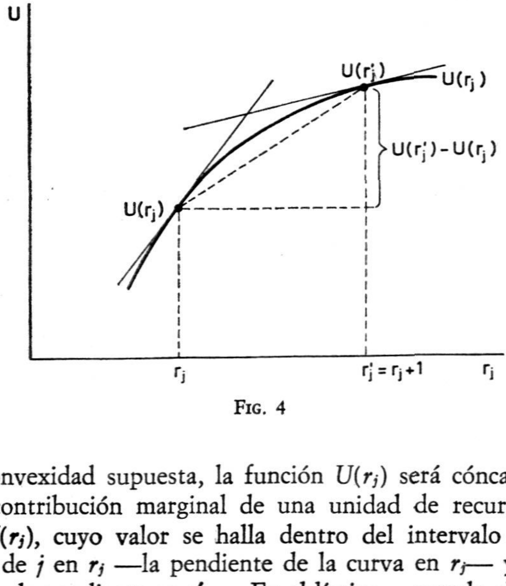

FIG. 4

Dada la convexidad supuesta, la función $U(r_j)$ será cóncava con respecto al eje r_j. La contribución marginal de una unidad de recurso j viene dada por $U(r_j') - U(r_j)$, cuyo valor se halla dentro del intervalo definido por el precio sombra de j en r_j —la pendiente de la curva en r_j— y el precio sombra de j en r'_j —la pendiente en r'_j—. En el límite —cuando el incremento del recurso en cuestión es infinitesimal— el precio sombra del recurso y su contribución marginal coincidirán con el valor de la pendiente de la función $U(r_j)$ en un punto dado de su dominio.

III. EL ANÁLISIS COSTE-BENEFICIO Y LA PLANIFICACIÓN NACIONAL

En las secciones previas hemos mostrado que el mercado no genera un conjunto de precios aceptables y que los precios que el análisis coste-beneficio debe usar en sus evaluaciones resultan de la solución de un problema de programación —es decir, que tales precios son los asociados con la maximización

10. Véase Kuhn y Tucker (5).

de una función de bienestar social sujeta a un determinado conjunto de restricciones. También hemos mostrado las características de esta solución óptima, en el sentido de interpretar dichos precios, dado un específico conjunto de posibilidades y una específica función de bienestar social. Lo que no hemos mostrado, en cambio, es cómo tal conjunto de precios —o, lo que es lo mismo, cómo tal programa óptimo— puede ser hallado en la práctica.

Esta forma de plantear el problema indica inmediatamente la estrecha conexión existente entre el análisis coste-beneficio y la planificación nacional. Si, en nuestras evaluaciones, queremos usar el conjunto de precios «adecuado», deberemos resolver previamente la solución óptima del ejercicio de programación nacional, lo cual, a su vez, significa que deberemos haber especificado las ponderaciones de cada uno de los procesos de nuestra particular función de bienestar social. Una redundancia aparece en este argumento: si hemos sido capaces de articular nuestras preferencias en lo que respecta a los distintos objetivos y si conocemos ya el conjunto óptimo de precios, ello significa que también tenemos conocimiento de cuál es la asignación óptima de recursos. En tales circunstancias, ¿cuál es la necesidad del análisis coste-beneficio?

El párrafo anterior señala claramente la orientación de lo que sigue. En cierta forma, el análisis coste-beneficio únicamente tiene sentido cuando se halla integrado totalmente en un plan general cuya solución óptima ha sido determinada; desde otro punto de vista, el análisis coste-beneficio es relevante precisamente *no* en una situación de optimalidad, sino en una situación en la que deseamos aproximarnos a tal optimalidad. Estas afirmaciones quizá sean suficientes para dar una idea del problema; la comprensión del mismo, sin embargo, requiere de un análisis más detenido de la relación entre estas dos técnicas de asignación de recursos y de la forma en que su aplicación puede llevarse a cabo.

Si se dispusiera de toda la información necesaria y si la economía funcionara como una única unidad de decisión, no habría problema para encontrar la solución del ejercicio de planificación: la cuestión quedaría reducida a un problema matemático. En la práctica, sin embargo, ni los datos son totalmente conocidos ni tampoco la existencia de una pluralidad de unidades de decisión puede ignorarse. Estas circunstancias condicionan la forma en que el problema ha de resolverse; en lugar de una solución matemática que nos dé, de una vez por todas, el conjunto de precios buscado, deberemos conformarnos con un método que se aproxime a estos precios a través de un proceso iterativo.

La idea sobre la cual tal proceso de iteración está basada [11] puede expresarse simplemente: sabemos que, con referencia al modelo general, existe un conjunto de precios asociados con el programa óptimo; suponemos, además, que las unidades económicas ajustan su comportamiento (como consumidores y como productores) en función de un determinado conjunto de precios.

11. Véase Malinvaud (6).

Aproximamos, entonces, el conjunto óptimo de precios a partir del establecimiento de un conjunto de precios de prueba, del análisis de las reacciones que este conjunto provoca y de la revisión en una fase subsiguiente del primer conjunto de prueba de acuerdo con una determinada regla. La repetición de este método, si el sistema económico satisface ciertos supuestos, puede hacer converger el conjunto de precios hacia su configuración óptima.

No es el propósito de este artículo analizar en detalle la base teórica de dicho método; la introducción de sus características principales, sin embargo, puede ayudarnos en la comprensión del concepto de precio sombra y de la relación existente entre planificación nacional y análisis coste-beneficio.

El ejercicio de programación considerado en la sección II puede ser planteado de forma ligeramente distinta. Si en lugar de leer las restricciones horizontalmente las leemos verticalmente, y si consideramos el problema desde un punto de vista macroeconómico de tal forma que cada bien pueda ser tanto un recurso como un producto final,[12] es fácil ver que los vectores resultantes pueden interpretarse como la síntesis de la información que necesitamos acerca de las condiciones tecnológicas bajo las cuales una determinada actividad o proceso será llevado a cabo. En dichos vectores, inputs entrarán con signo negativo y outputs con signo positivo. Si suponemos que existen m empresas, la producción neta de un determinado bien i por parte de la empresa k es representada por y_{ik}, cuyo signo puede ser tanto positivo como negativo. Si el consumo final del bien i es representado por x_i, la demanda neta de este bien (z_i) será:

$$z_i = x_i - \sum_{k=1}^{m} y_{ik}$$

y, en general, si suponemos la existencia de n bienes ($i = 1, \ldots, n$), podemos introducir la siguiente notación vectorial:

$$z = x - \sum_{k=1}^{m} y_k$$

Las restricciones sobre los elementos de esta ecuación pueden sumarizarse en la siguiente forma: el vector de consumo final debe ser aceptable desde el punto de vista de los consumidores (es decir, debe pertenecer a un determinado conjunto X determinado por consideraciones políticas distributivas o de otro tipo); el vector y_k debe ser técnicamente factible (debe pertenecer al conjunto Y_k representante de la tecnología de que la empresa k puede disponer); finalmente, el vector de demanda neta z_i debe ser posible en el

12. Nótese la similitud de este enfoque con el análisis input-output.

sentido de que no puede exceder la cantidad inicial de recursos (w_i).[13] Si además suponemos la existencia de una función de bienestar social que tiene como argumentos los niveles de consumo final, el problema puede ser planteado así:

$$\max_{x} \quad W = W(x)$$

$$\begin{array}{llll} \text{sujeta a} & 1) & x \in X & \\ & 2) & y_k \in Y_k & (k = 1, \ldots, m) \\ \& & 3) & z_i \leqslant w_i & \end{array}$$

La solución de este problema será aquel programa que, a la vez que factible, maximice bienestar. Dicho programa viene dado por tres conjuntos óptimos: x^*, y_k^* ($k = 1, \ldots, m$) y z^*.

Asociado a este programa existe un conjunto óptimo de precios[14] que, bajo ciertos supuestos, satisface las siguientes propiedades:

a) Si $W(x) > W(x^*)$, entonces $p^* x > p^* x^*$.
b) Para todos $y_k \in Y_k$, $p^* y_k^* \geqslant p^* y_k$.
c) Si $z_i^* < w_i$, entonces $p_i^* = 0$.

La primera propiedad especifica que x^* (el programa asociado con p^*) es el mejor programa. Cualquier otro programa incrementaría bienestar sólo a costa de aumentar el coste. La segunda propiedad especifica que de todos los y_k disponibles, el valor de ninguno de ellos debe ser mayor que el valor del asociado con el conjunto óptimo de precios (y_k^*). Finalmente, la tercera propiedad establece que el precio óptimo de un determinado bien cuya oferta inicial excede la demanda neta es cero.

Los supuestos que garantizan la existencia de este conjunto óptimo de precios son:

1. La función $W(x)$ es cóncava y continua.
2. El conjunto X es cerrado y convexo.
3. Cada conjunto Y_k es cerrado y convexo.

Suponer concavidad y continuidad para la función $W(x)$ nos asegura que las superficies de indiferencia serán convexas con respecto al origen y que

13. En el presente contexto la distinción entre recursos y bienes finales pierde su sentido. Cada recurso es tanto un input como un output; naturalmente, puede ocurrir que la demanda de tal recurso como output (demanda final) sea nula, o que la demanda del mismo como input (demanda de factores) sea nula, o que ambas sean mayores que cero. Es en este sentido que el vector w puede interpretarse como la cantidad inicial tanto de factores de producción como de bienes finales.

14. Tales precios son simplemente las variables del problema «dual» considerado en la sección II.

su pendiente estará definida en todos sus puntos. Suponer que un conjunto es cerrado asegura que dicho conjunto contiene todos sus puntos límites y, por tanto, que el máximo pertenecerá también al conjunto (será factible). Finalmente, el supuesto de convexidad asegura relaciones marginales de sustitución decrecientes o constantes por lo que respecta al conjunto X y economías de escala decrecientes o constantes por lo que respecta al conjunto Y_k.

Como hemos señalado anteriormente, la dificultad surge de la falta de información necesaria para obtener el programa óptimo. Podemos suponer que el planificador conoce la función de bienestar $W(x)$, el conjunto de consumos finales aceptables (X) y el vector de recursos disponibles (w), pero que ignora el conjunto Y_k. Por otra parte, suponemos que cada empresa conoce su propio Y_k pero desconoce las posibilidades de producción de otras empresas (Y_j para $j \neq k$) así como X, w o $W(x)$. Bajo estos supuestos un procedimiento para llegar al conjunto óptimo debe especificar cómo se transmite la información entre las empresas y el planificador y qué tipo de información se transmite. El procedimiento que aquí estamos considerando [15] establece que el planificador establece «índices de prueba», que basándose en tales índices cada empresa avanza una «propuesta» y que después de cierto número de contactos de este tipo, el planificador escoge un programa.

El procedimiento consiste en encontrar el conjunto óptimo de precios por medio de sucesivas aproximaciones. Los índices de prueba de cada fase serán las correspondientes aproximaciones a los precios óptimos; la respuesta de cada empresa a dichos índices vendrá dada en términos de cantidades y, de acuerdo con tales respuestas, los precios serán revisados: aumentados para aquellos bienes cuyas propuestas demandas netas excedan las disponibilidades iniciales y disminuidos para aquellos bienes cuya demanda neta quede por debajo de las disponibilidades iniciales.[16] Se puede demostrar que, dados los supuestos 1, 2 y 3, el conjunto de precios de prueba converge hacia el conjunto de precios óptimo.[17]

El significado de este conjunto óptimo de precios para el análisis coste-beneficio resulta obvio de lo dicho en la sección II: los mismos corresponden a los precios sombra de los diferentes bienes. Esta circunstancia tiene implicaciones fundamentales por lo que a la interpretación del análisis coste-beneficio se refiere y conviene, por tanto, detenerse en su análisis.

La consideración estricta de este hecho nos lleva a la conclusión de que

15. El procedimiento aquí considerado corresponde al modelo de Arrow y Hurwicz (1). En dicho modelo, el mecanismo de ajuste es continuo; un modelo que establece un ajuste discreto es el de Uzawa (10).

16. Nótese que tales excesos son puramente hipotéticos, dado que el intercambio comercial o la producción de bienes no tiene lugar hasta que el programa final ha sido establecido; en otras palabras: a similitud de lo que ocurre con el «tâtonnement» walrasiano, no existe actividad económica a precios distintos de los óptimos.

17. Debe tenerse presente, sin embargo, que convergencia hacia el conjunto óptimo de precios no significa necesariamente convergencia hacia el programa óptimo. Para ello, los supuestos anteriores deberían hacerse más estrictos; en particular, en lugar de rendimientos constantes y decrecientes debería exigirse la existencia únicamente de rendimientos decrecientes.

el análisis coste-beneficio no tiene sentido desligado de un marco planificador en donde las prioridades sociales se hallen perfectamente especificadas y en donde, por tanto, los precios sombra sean completamente conocidos. La realidad, sin embargo, presenta un panorama sustancialmente distinto al que pudiera desprenderse del presente artículo. La aplicación de un proceso iterativo como el acabado de describir ni ha sido nunca llevada a cabo ni posiblemente lo vaya a ser en un futuro próximo. Esta circunstancia ha condicionado necesariamente la forma en que el análisis coste-beneficio ha sido utilizado. Los precios sombra no han resultado de un ejercicio global de programación sino con base a la corrección de precios de mercado en función de la consideración específica de las causas por las cuales dichos precios no son aceptables.

¿Hasta qué punto está tal forma de proceder justificada? Las posiciones frente a este problema son básicamente dos. La primera [18] arguye que tanto el conjunto óptimo de precios como el programa a él asociado surgen simultáneamente del ejercicio de programación y, por tanto, el procedimiento del análisis coste-beneficio, al escoger primero precios y luego (a través de la evaluación) cantidades, es esencialmente incorrecto. Por otra parte, las correcciones operadas con base a los precios de mercado, son artificios cuya aplicación en modo alguno asegura que la evaluación resulte en una asignación de recursos más cercana a la óptima; tal propiedad podría únicamente ser derivada de un procedimiento completo para determinar el plan óptimo.

La segunda,[19] en cambio, adopta una postura mucho menos taxativa. Aunque el anterior planteamiento general es completamente aceptado, la cuestión acerca de la justificación del análisis coste-beneficio se aborda de forma mucho más matizada. Es conveniente describir esta segunda posición refiriéndonos a los dos puntos básicos de la crítica planteada por la anterior: la prelación del uso de precios y cantidades y la corrección de los precios de mercado.

Por lo que respecta al primero, se argumenta que en ciertas circunstancias el uso de precios con antelación a cantidades puede estar justificado. Así, por ejemplo, una economía que sólo produzca bienes exportables y que se halle en un marco internacional competitivo, se hallará frente a un conjunto de precios (los internacionales) que son invariables sean cuales sean sus niveles de producción; en tal caso, el uso de tales precios para realizar evaluaciones está perfectamente justificado; dicho conjunto es por necesidad el asociado al programa óptimo. Aunque irreal, este ejemplo ilustra de forma precisa la naturaleza del problema: la respuesta a la cuestión de la prelación no puede darse de antemano, sino que depende en gran medida del grado de sensibilidad de los precios; cuanto más insensibles sean los precios, más justificación tiene el uso del análisis coste-beneficio; en otras palabras, cuanto

18. Véase Rudra (7).
19. Véase Sen (9).

más insensibles sean los precios, más sentido tiene emplear primero precios y determinar a continuación las cantidades a producir a través de la evaluación pertinente. Esta conclusión resuelve el problema de la justificación del análisis coste-beneficio a costa de plantear el de la insensibilidad de precios. Ello nos conduce directamente a otro importante elemento en el estudio de las relaciones entre estas dos técnicas de asignación. En general, cuanto más pequeño sea el proyecto a evaluar, menor será el efecto del mismo sobre los precios sombra y más sentido tendrá una evaluación a partir del análisis coste-beneficio. Por el otro lado, cuanto mayor sea el proyecto, mayor será su influencia sobre la futura configuración de los precios sombra y más sentido tendrá la evaluación del mismo dentro de un ejercicio de programación que abarque toda la economía.

Por lo que respecta a la segunda cuestión, la respuesta a la crítica planteada por la posición planificadora es posiblemente menos satisfactoria. También en esta circunstancia se acepta el fundamento teórico de tal crítica: la corrección de un precio de mercado, desligada de un procedimiento completo para resolver el ejercicio total y basada simplemente en la apreciación de las razones por las cuales tal precio no es aceptable, no ofrece ninguna garantía de aproximación a una situación óptima. Mejorar el criterio de asignación de recursos por lo que respecta a crecimiento no tiene por qué mejorar el criterio de asignación por lo que respecta a distribución; similarmente, corregir el precio de un bien monopolizado y dejar los otros intactos tampoco implica nada en lo referente a optimalidad. Sin duda alguna, la mejor solución sería poder obtener el precio de todos y cada uno de los recursos de un ejercicio de programación a escala nacional; el problema, sin embargo, reside, por el momento, en la imposibilidad práctica de llevar a término tal ejercicio y en la necesidad de conformarse con soluciones inferiores. Una de ellas es precisamente la corrección de precios de mercado de acuerdo con un criterio suficientemente amplio de agregación; la corrección del nivel de salarios a partir del análisis de la situación de desempleo, o la corrección del precio de los bienes de inversión a partir del análisis de la situación del ahorro, son dos ejemplos de este tipo de soluciones. Es evidente que el criterio de agregación es demasiado amplio para poder tener en cuenta todas y cada una de las distorsiones que afectan al precio de recursos en particular; ahora bien, esta circunstancia también interesa al enfoque planificador: la realización de un ejercicio de programación a escala nacional habrá de basarse, en gran medida, en un considerable nivel de agregación, si tal ejercicio pretende ser operativo.

IV. Conclusión

La conclusión de esta confrontación de posturas, pues, no parece demasiado esperanzadora: el análisis coste-beneficio constituye una solución que, aunque factible, no es la mejor por lo que al uso de precios sombra se refiere;

por otra parte, el ejercicio de programación nacional, aunque es en principio la mejor solución, ofrece problemas prácticos cuya superación puede resultar en precisamente aquellas deficiencias por las que la primera solución se caracteriza como inferior.

Sería interesante acabar este artículo con, por lo menos, la mención de una posible salida de este oscuro panorama. Sin embargo, y para ser completos, la mención que falta no despeja el camino, sino que, en todo caso, lo entorpece más todavía. Como se ha dicho en la primera sección, la aplicación del análisis coste-beneficio tiene sentido cuando el mercado no genera los precios óptimos y cuando, a pesar de ello, el sistema de precios sigue funcionando. También hemos visto que esta intersección de situaciones puede ser extremadamente pequeña: una de las razones por las cuales el mercado falla (economías de escala) es también la causa de que el sistema de precios no funcione. Si ello es así, y aparte del carácter parcial de la técnica, la utilidad del análisis coste-beneficio queda francamente reducida. Pero esto no es todo; el funcionamiento del sistema de precios constituye la base no sólo del análisis coste-beneficio, sino también del proceso iterativo analizado anteriormente.[20] Tal proceso, después de todo, es simplemente una repetición controlada del proceso por el cual un mercado perfecto asignaría recursos. Así, aun en el supuesto de que las técnicas de programación pudieran mejorarse de forma sustancial, su operatividad quedaría restringida únicamente a situaciones en las que existieran rendimientos decrecientes o, máxime, constantes.

El problema, pues, queda reducido en gran parte a una cuestión empírica: la posibilidad de asignar recursos a partir de la utilización de precios sombra, vengan éstos determinados según correcciones de los de mercado o como solución de un particular ejercicio de programación, estará crucialmente ligada a la medida en que la existencia de economías de escala sea o no una característica relevante del contexto económico en que tales precios pretenden emplearse.

London School of Economics

BIBLIOGRAFÍA

1. ARROW, K. J., y HURWICZ, L.: «Decentralization and Computation in Resource Allocation», en *Essays in Economics and Econometrics,* editado por R. W. PFOUTS, University of North Carolina Press, 1960.
2. BATOR, F. M.: «The Simple Analytics of Welfare Maximization», *American Economic Review,* vol. 47, 1957.
3. DORFMAN, R.; SAMUELSON, P., y SOLOW, R.: *Linear Programming and Economic Analysis,* McGraw Hill, Nueva York, 1958.

20. Un proceso basado en el suministro de cantidades por parte de la autoridad planificadora y en la recepción de precios por parte de las distintas empresas se vería también afectado por la existencia de rendimientos crecientes.

4. KOOPMANS, T. C.: *Three Essays on the State of Economic Science,* McGraw Hill, Nueva York, 1959.
5. KUHN, H. W., y TUCKER, A. W.: «Nonlinear Programming», en *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* University of California Press, California, 1951.
6. MALINVAUD, E.: «Decentralized Procedures for Planning», en *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning,* editado por E. MALINVAUD y M. O. L. BACHARACH, Macmillan, Londres, 1967.
7. RUDRA, A.: *Use of Shadow Prices in Project Evaluation,* presentado en el World Econometric Congress, Cambridge, 1970.
8. SEN, A. K.: *Choice of Techniques,* 3.ª ed., Blackwell, Oxford, 1972.
9. SEN, A. K.: «Interrelations between Project Planning, Sectoral Planning and Aggregate Planning», *Economic Bulletin for Asia and the Far East, United Nations,* junio-septiembre, 1970.
10. UZAWA, H.: «Iterative Methods for Concave Programming», en *Studies in Linear and Non-Linear Programming,* editado por K. J. ARROW, L. HURWICZ y H. UZAWA, Standford University Press, Standford, 1958.